

Nous sommes toutes distinctes

Dans cet exercice, le symbole n désigne un entier naturel, avec $n \geq 1$; tous les ensembles considérés sont non vides, finis et constitués de nombres réels distincts ; de plus on conviendra d'écrire tout ensemble fini $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ à n éléments réels distincts en ordonnant toujours $a_1, a_2, \dots, a_n$ si bien que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Étant donné un tel ensemble, on note $S(A)$ la somme de ses éléments, soit :

$$S(A) = a_1 + \dots + a_n$$

En particulier, lorsque $n = 1$ et donc $A = \{a_1\}$ est un singleton, $S(A) = a_1$.

On dit que l'ensemble A est à *sommes toutes distinctes* (en abrégé que A est STD) quand, pour toutes parties non vides distinctes Y et Z de A , $S(Y) \neq S(Z)$. Cela revient à demander aux $2^n - 1$ sommes que l'on peut former avec des éléments de A d'être toutes distinctes.

Par exemple $A = \{1, 2, 5\}$ est STD parce que les nombres $1, 2, 5, 1 + 2 = 3, 2 + 5 = 7, 1 + 5 = 6, 1 + 2 + 5 = 8$ sont tous distincts. En revanche, $A = \{2, 4, 6, 7\}$ n'est pas STD parce qu'en prenant $Y = \{2, 4, 7\}$ et $Z = \{6, 7\}$, on a $S(Y) = 2 + 4 + 7 = 13 = S(Z)$, bien que $Y \neq Z$.

Partie 1 : Exemples et contre-exemples simples

1. Expliquer pourquoi le nombre de sommes à envisager pour étudier le caractère STD de A vaut $2^n - 1$.
2. Montrer que l'ensemble $\{1, 3, 5\}$ est STD mais que l'ensemble $\{4, 6, 7, 9\}$ ne l'est pas.
3. Quel(s) ensemble(s) A contenant 0 est (sont) STD ?
4. Soient A et B deux ensembles non vides et finis de réels distincts, avec $A \subset B$ (c'est-à-dire que A est un sous-ensemble de B).
 - a. Si B est STD ; justifier que A l'est aussi.
 - b. L'ensemble B peut-il être STD si A ne l'est pas ?
5. Soit A un ensemble non vide et fini de réels distincts. On suppose que A n'est constitué que de nombres entiers et qu'il est STD. Justifier que $A \cup \{\frac{1}{2}\}$ puis que $A \cup \{\frac{1}{2}, \sqrt{2}\}$ sont aussi STD.

Partie 2 : Construction d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence, valable pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = u_1 + \dots + u_n + 1$$

6. Vérifier que $u_2 = 2$ et $u_3 = 4$. Calculer u_5 .
7. Rédiger sur votre copie un programme en langage Python qui renverrait u_{100} (qu'on ne calculera pas).
8. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
9. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{u_1, \dots, u_n\}$ est STD.
10. Montrer que (u_n) est en fait une suite géométrique que l'on déterminera.

Partie 3 : Suites STD

Une suite (u_n) est dite STD lorsqu'elle est strictement croissante, qu'elle est composée d'entiers strictement positifs, et que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{u_1, \dots, u_n\}$ est STD. Par exemple, la suite étudiée en **partie 2** est une suite STD.

11. Soit (u_n) une suite STD quelconque.
 - a. Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$u_1 + \dots + u_n \geq 2^n - 1$$

b. En déduire que pour tout $n \geq 2$:

$$u_n \geq \frac{2^n}{n}$$

12. Le but de cette question est d'affiner la minoration obtenue à la question précédente. Pour ce faire, nous aurons recours aux probabilités, et nous dirons qu'une variable aléatoire X à valeurs dans un ensemble réel fini non vide $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ à n éléments distincts suit une loi uniforme quand toutes les valeurs qu'elle peut atteindre sont équiprobables. Ainsi,

$$P(X = a_1) = P(X = a_2) = \dots = P(X = a_n) = \frac{1}{n}$$

a. Soit (u_n) une suite STD quelconque. Pour $n \geq 2$ on considère les variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ qui suivent la loi uniforme sur la paire $\{-1, 1\}$: ainsi, pour chacun des indices i , $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $X = u_1 X_1 + \dots + u_n X_n$. On admet que $E(X) = u_1 E(X_1) + \dots + u_n E(X_n)$ et que $V(X) = u_1^2 V(X_1) + \dots + u_n^2 V(X_n)$. Après avoir justifié que $E(X_1) = 0$ et $V(X_1) = 1$, calculer l'espérance $E(X)$ et exprimer la variance $V(X)$ en fonction de $u_1, u_2, \dots, u_n$.

b. Montrer que X suit une loi uniforme sur un ensemble de 2^n entiers relatifs, symétrique par rapport à 0, et dont les éléments sont non nuls et de la même parité.

c. En déduire que pour $n \geq 1$

$$u_n^2 \geq \frac{1}{n 2^{n-1}} (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2^n - 1)^2)$$

d. Proposer une valeur de $n \geq 2$ pour laquelle cette inégalité fournit un minorant plus grand qu'en **11.b**.